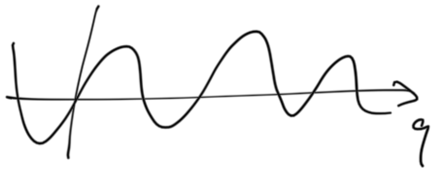
Relace neurčitosti

p, x ← nemůžeme smysluplně současně měřit

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{i}{\hbar} p x}$$

→ 

Jak přesně můžu současně měřit dvě veličiny

směrodatná odchylka

veličina A → operátor $\hat{A}$

střední kvadratická odchylka

$$\boxed{(\Delta A)^2} = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle$$

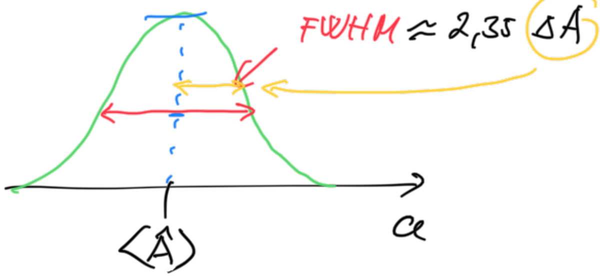
$$= \langle \hat{A}^2 - 2\langle \hat{A} \rangle \hat{A} + \langle \hat{A} \rangle^2 \rangle$$

$$= \boxed{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$$

Směrodatná odchylka

$$\Delta A = \sqrt{(\Delta A)^2}$$

Význam: rozdělení výsledků měření kolem střední hodnoty



Odvození relací neurčitosti

2 veličiny A, B

→ předpokládáme $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle = 0$

(lze vždy docílit např.: $\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$)

střední kvadratické odchylky

$$(\Delta A)^2 = \langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle = \langle\psi_a|\psi_a\rangle \quad ; \; |\psi_a\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$$

$$(\Delta B)^2 = \langle\psi|\hat{B}^2|\psi\rangle = \langle\psi_b|\psi_b\rangle \quad ; \; |\psi_b\rangle = \hat{B}|\psi\rangle$$

Hilbertův prostor ⇒ Cauchyho-Schwarzova nerovnost

$$\langle\psi_a|\psi_a\rangle\langle\psi_b|\psi_b\rangle \geq |\langle\psi_a|\psi_b\rangle|^2$$

$\langle \psi_a | \psi_b \rangle \Rightarrow$ obecné komplexní číslo

$$z = x + iy \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 \geq y^2$$

můžeme psát $\quad y = \dfrac{z - z^*}{2i}$

$$|z|^2 \geq \left(\frac{z - z^*}{2i}\right)^2 \Rightarrow |\langle \psi_a | \psi_b \rangle|^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\left(\langle \psi_a | \psi_b \rangle - \langle \psi_b | \psi_a \rangle\right)\right)^2$$

Obě nerovnosti: $\Rightarrow$

$$\langle \psi_a | \psi_a \rangle \langle \psi_b | \psi_b \rangle = (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \langle \psi | (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) | \psi \rangle\right]^2$$

$$\boxed{(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle\right)^2}$$

<u>Příklad:</u>

$$\hat{p}, \hat{x} \Rightarrow [\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$$

$$(\Delta p)^2 (\Delta x)^2 \geq \left(\frac{1}{2i}(-i\hbar)\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Delta p \, \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$