Teplotní rozšíření spektrální čáry

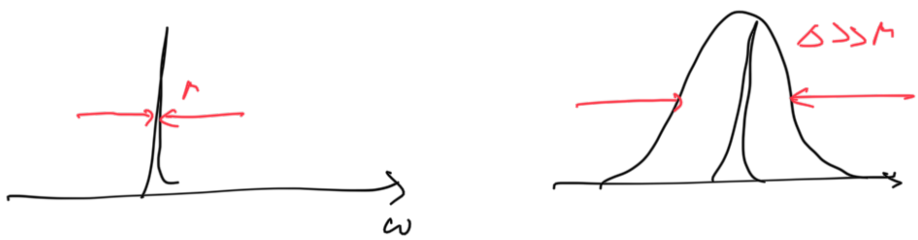
Rozdělení vyzářených fotonů

$|m\rangle$

$|n\rangle$

$$\boxed{P_{\lambda\vec{q}} = \frac{1}{2\varepsilon_0\hbar\omega_q}\,\frac{|\vec{e}_{\lambda q}\cdot\vec{d}_{mn}|^2\,(E_m-E_n)^2}{(E_m-E_n+\hbar\omega_q)^2+\frac{\hbar^2}{4\tau_m^2}}}$$

Předpokládáme, že rozšíření v důsledku T je větší $\gg$ než přirozená šířka čáry:



Přirozenou čáru nahradíme δ-funkcí

Využijeme

pod limitou $a \to 0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{x^2+a^2} \to \frac{\pi}{a}\delta(x)$

Delta funkce

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{i\xi x}$$ rozšíříme pomocí limity

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{i\xi x - a|\xi|}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{a\to 0}\left[\int_0^{\infty} d\xi\, e^{i\xi x - a\xi} + \int_{-\infty}^{0} d\xi\, e^{i\xi x + a\xi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to 0} \left\{ \frac{1}{ix-a} \left[e^{i\xi x - a\xi} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{ix+a} \left[e^{i\xi x + a\xi} \right]_{-\infty}^{0} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to 0} \left(-\frac{1}{ix-a} + \frac{1}{ix+a} \right) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to 0} \left(\frac{1}{a+ix} + \frac{1}{a-ix} \right)$$

$$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\, z$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{a\to 0} \mathrm{Re} \frac{1}{a+ix} \cdot \frac{a-ix}{a-ix} = \frac{1}{\pi} \lim_{a\to 0} \mathrm{Re} \frac{a-ix}{a^2+x^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{a\to 0} \frac{a}{x^2+a^2}$$

Pod $\lim_{a\to 0}$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2+a^2} \\ \frac{1}{x^2+a^2} &= \frac{\pi}{a} \delta(x) \end{aligned}}$$

Náš případ pro $P_{\lambda\vec{q}}$

$$\frac{\hbar}{2\tau_n} \longrightarrow 0 \qquad a \qquad E_m - E_n \approx \hbar\omega_q$$

$$P_{\lambda\vec{q}} \longrightarrow \frac{\pi \tau_n}{\hbar \varepsilon_0} \left| \vec{e}_{\lambda\vec{q}} \cdot \vec{d}_{mn} \right|^2 (E_n - E_m)\, \delta(E_m - E_n + \hbar\omega_q)$$

Uvažujeme atomy o hmotnosti m a Maxwellovo rozdělení rychlostí:

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

Zákon zachování hybnosti

$$m\vec{v} = m\vec{u} + \hbar\vec{q}$$

hybnost fotonu

hybnost po vyzáření

hybnost před vyzářením

$$\vec{v} = \vec{u} + \frac{\hbar\vec{q}}{m} \quad ; \quad \vec{u} = \vec{v} - \frac{\hbar\vec{q}}{m}$$

Zákon zachování energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + E_n = \hbar\omega_{\vec{q}} + \frac{1}{2}mu^2 + E_m$$

$$\hbar\omega_{\vec{q}} = E_n - E_m + \frac{1}{2}m\left(v^2 - u^2\right)$$

$$= E_n - E_m + \frac{1}{2}m\left(v^2 - \left(\vec{v} - \frac{\hbar\vec{q}}{m}\right)^2\right)$$

malý!

$$= E_n - E_m + \frac{1}{2}m\left(\cancel{v^2} - \cancel{v^2} + 2\frac{\vec{v}\cdot\vec{q}\,\hbar}{m} - \frac{\hbar^2|\vec{q}|^2}{m^2}\right)$$

$$= E_n - E_m + \hbar\,\vec{v}\cdot\vec{q}$$

Vystředujeme vyzáření fotonu přes rozdělení rychlostí

$$P_{\lambda\vec{q}} = \int d\vec{v}\, f(\vec{v})\, \frac{\pi\omega_{nm}}{\hbar\varepsilon_0}\left|\vec{e}_{\lambda\vec{q}}\cdot\vec{d}_{nm}\right|^2 (E_n - E_m)\,\delta\left(E_n - E_m + \hbar\vec{v}\cdot\vec{q} - \hbar\omega_{\vec{q}}\right)$$

Označujeme $q = |\vec{q}|$

a nově zavedeme $v = \vec{v}\cdot\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$ } průmět $\vec{v}$ do směru vyzařování

Teď můžeme vystředovat přes složky $\vec{v}$ kolmé na $\vec{q}$

$$\overline{P}_{\lambda\vec{q}} = \frac{\pi\omega_{nm}}{\hbar\varepsilon_0}\left|\vec{e}_{\lambda\vec{q}}\cdot\vec{d}_{nm}\right|^2 (E_n - E_m)\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\int dv\, e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

$$\times\, \delta(E_n - E_m + \hbar v q - \hbar \omega_{\vec{q}}) \qquad \omega_q = cq$$

z podmínky v δ-funkci plyne

$$E_n - E_m + \hbar v q - \hbar c q = 0$$

$$v = \frac{E_n - E_m + \hbar c q}{\hbar q}$$

$$v = \frac{E_n - E_m}{\hbar q} + c$$

<u>Dosadíme do P_{kq}:</u>

$$P_{kq} = \frac{\pi \tau_m}{\hbar \varepsilon_0} \left|\vec{e}_{kq} \cdot \vec{d}_{mn}\right|^2 (E_n - E_m) \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \times \frac{1}{\hbar q}\, e^{-\frac{m}{2k_B T}\left(\frac{E_n - E_m}{\hbar q} - c\right)^2} \approx e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\Delta^2}}$$

Δ šířka

$$\frac{E_n - E_m}{\hbar q} - c = \frac{1}{\hbar q}(E_n - E_m - \hbar c q)$$

kolem maxima $\hbar c q \approx E_n - E_m$

$$\Rightarrow \hbar q \approx \frac{E_n - E_m}{c}$$

tedy:

$$\frac{1}{(\hbar q)^2}(E_n - E_m - \hbar c q)^2 \approx \frac{c^2}{(E_n - E_m)^2}(E_n - E_m - \hbar c q)^2$$

exponent:

$$\frac{m}{2k_B T} \frac{c^2}{(E_n - E_m)^2} (\overbrace{E_n - E_m}^{\hbar\omega_{nm}} - \overbrace{\hbar c q}^{\hbar\omega})^2$$

$$= \frac{m c^2 \hbar^2}{2 k_B T (E_n - E_m)^2} (\omega_{nm} - \omega)^2 = \frac{(\omega_{nm} - \omega)^2}{\omega_T^2}$$

šířka čáry

$$\omega_T = \frac{|E_n - E_m|}{\hbar}\sqrt{\frac{2k_B T}{mc^2}}$$

šířka čáry roste s odmocninou z T $\sim \sqrt{T}$